

تحلیل فلاتر پنل ساندویچی استوانه‌ای تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده با استفاده از روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته

پورموید علیرضا^{*}، ملک‌زاده فرد کرامت^۱، شهری مرزئی^۲

۱- دکترای هوافضا، مربی دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء(ص)، تهران

۲- استاد، مهندسی مکانیک، مجتمع هوافضای دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

۳- دانشیار، مهندسی مکانیک، مجتمع هوافضای دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۲۱)

چکیده

در این پژوهش، رفتار یک پانل ساندویچی استوانه‌ای شکل با هسته انعطاف‌پذیر در شرایط مرزی مختلف، تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و اصل همیلتون معادلات حاکم استخراج و از روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته حل شده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن سادگی روش حاضر نسبت به سایر روش‌ها در تحلیل مسائل پایداری پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل، نتایج حاضر از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین بررسی نتایج نشان می‌دهد که پدیده فلاتر در شرایط مرزی یکسر گیردار و یکسر آزاد رخ می‌دهد و در شرایط مرزی دیگر تنها پدیده دیورژانس یا کمانش استاتیکی رخ می‌دهد. یکی دیگر از نتایج قابل توجه این است که افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت باعث می‌شود تا پدیده فلاتر در پانل ساندویچی استوانه‌ای با هسته انعطاف‌پذیر، دیرتر به وقوع بپیوندد.

واژه‌های کلیدی: فلاتر، نیروی تعقیب‌کننده، پانل ساندویچی استوانه‌ای، روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته، پایداری دینامیکی

Flutter analysis of cylindrical sandwich panel under follower force using generalized differential quadrature method

Ali Reza Pourmoayed, Keramat Malekzadeh Fard, Morteza Shahravi

Abstract

In this research, behavior of a cylindrical sandwich panel with the flexible core in different boundary conditions, under the influence of follower force are studied. For this purpose, using the theory of the first-order shear deformation, and the principle of Hamilton, the governing equations have been extracted and by using generalized differential quadrature method (GDQM) are solved. The obtained results indicate that by considering simplicity of present method compared to the other methods in the analysis of stability problems of the cylindrical sandwich panel, the present results have the acceptable accuracy. Also, the results review show that the flutter phenomenon occurs in the free and clamp boundary conditions and for other boundary conditions only the divergence phenomenon or static buckling occurs. Another significant result is that increasing the number of composite layers, makes the flutter phenomenon in the cylindrical sandwich panel with the flexible core occurs later.

Keywords: *Flutter, Follower force, cylindrical sandwich panel, Generalized differential quadrature method, Dynamic stability*

مقدمه

سازه‌های ساندویچی از دو رویه نازک و یک هسته نرم تشکیل شده و به‌طور وسیعی در هواپیماها، موشک‌ها، زیردریایی‌ها، صنایع دریایی و خودروسازی کاربرد دارند. این مواد به‌واسطه‌ی سفتی و مقاومت ویژه بالا، عایق بودن نسبی در برابر حرارت و صدا، قابلیت ساخت و پایداری مناسب مقبولیت ویژه‌ای یافته‌اند [۱]. از سوی دیگر با توجه به نیاز به کاهش وزن به‌خصوص در صنایع هوایی، استفاده گسترده از مواد سبک و انعطاف‌پذیر همچون مواد مرکب رو به فزونی است. با توجه به استفاده گسترده ورق‌ها، پوسته‌ها و پنل‌های ساندویچی^۱ در وسایل پرنده هوایی، بررسی نیروهای پایستار و ناپایستار که منجر به پدیده فلاتر^۲ می‌شوند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به‌عنوان مثال در خصوص نیروهای پایستار و ناپایستار می‌توان به نیروی وارد بر آمده به بال یک هواپیما اشاره کرد که نیروی وزن بال از نوع پایستار و فشار اعمال‌شده بر روی بال از نوع ناپایستار می‌باشد.

پایداری یکی از مهم‌ترین اصول طراحی مختلف سازه‌ها می‌باشد. یک سازه، بدون توجه به استاتیکی یا دینامیکی بودن بار، می‌واند تحت شرایط خاصی دچار ناپایداری شود. به‌همین دلیل یکی از مهم‌ترین مسائلی که بایستی در طراحی‌های مختلف مورد توجه قرار گیرد، طراحی سازه به‌نحوی است که همواره پایدار باقی بماند. زمانی که یک سازه تحت اثر یک نیروی ثابت تعقیب‌کننده^۳ قرار می‌گیرد که جهت آن هم‌زمان با تغییر شکل سازه تغییر می‌کند، بیشتر با احتمال ناپایداری مواجه می‌شود. این‌چنین ناپایداری استاتیکی با عنوان پدیده دیورژانس^۴ شناخته می‌شود که این نوع ناپایداری بسته به ماهیت نیروی واردآمده می‌تواند استاتیکی یا دینامیکی باشد. پدیده دیورژانس که مشابه با پدیده کمانش در سازه‌های تحت نیروهای پایستار است زمانی رخ می‌دهد که فرکانس عرضی طبیعی سازه صفر شود. علاوه بر ناپایداری استاتیکی، سازه‌های تحت اعمال نیروهای تعقیب‌کننده می‌توانند دچار ناپایداری دینامیکی که با عنوان پدیده فلاتر شناخته می‌شوند نیز قرار گیرند. در این حالت دو فرکانس عرضی طبیعی سازه با یکدیگر برابر می‌شوند. در چنین شرایطی دامنه ارتعاشات سازه به شدت رشد کرده و سازه را دچار ناپایداری می‌کند [۲].

با توجه به کاربرد و اهمیت فراوان نیروهای تعقیب‌کننده در سازه‌های مختلف، بررسی رفتار سازه‌ها تحت اثر این نیروها و

بررسی پایداری آن‌ها موضوع مورد علاقه بسیاری از پژوهشگران در این حوزه در سال‌های اخیر می‌باشد. در سال ۱۹۲۸ برای اولین بار مسئله پایداری یک سازه الاستیک تحت اثر نیروهای تعقیب‌کننده توسط نیکولای مورد بررسی قرار گرفت [۳]. اما مسئله بررسی نیروهای تعقیب‌کننده در سازه‌ها هم‌زمان با طرح سه مسئله الاستیک توسط بک^۵ [۴]، لیپولز^۶ [۵] و هاگر^۷ [۶] مورد توجه پژوهشگران قرار گرفت.

نیروی تراست اعمال‌شده بر بدنه سازه‌های هوایی با موتور جت، روتور توربین‌های گازی، نیروی نگه‌دارنده در ترمزهای دیسکی و نیروی گریز از مرکز اعمال‌شده بر روی یک صفحه با استفاده از یک جرم متمرکز و مسائلی از این قبیل کاربرد مسئله بک در صنعت می‌باشد. در مسائل لیپولز و هاگر نیروی تعقیب‌کننده به‌صورت یک نیروی گسترده بر کل سازه وارد می‌شود. به‌عنوان مثال می‌توان به نیروی وارد بر بدنه مخازن انتقال سوخت مایع اشاره کرد.

ترکی و همکاران [۷] اثر تغییر شکل محوری پوسته بر روی فلاتر پوسته‌های استوانه‌ای‌گیردار تحت نیروهای تعقیب‌کننده را بررسی کردند. آلتمن و الی ویرا [۸] ارتعاش و پایداری پنل‌های استوانه‌ای همگن ایزوتروپ با شرایط مرزی گیردار را بدون در نظر گرفتن اثر میرایی مورد مطالعه قرار دادند. پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای نازک با شرایط مرزی مختلف تحت نیروهای تعقیب‌کننده متمرکز و گسترده به‌وسیله بیسمارک با استفاده از روش المان‌محدود مورد بررسی قرار گرفته است [۹]. فلاتر فراصوت پوسته‌های کامپوزیتی استوانه‌ای با در نظر گرفتن میرایی سازه‌ای به‌وسیله شین [۱۰] با روش المان‌محدود بر اساس تئوری زیگزاگ تحت نیروهای آیرودینامیکی مورد بررسی و با استفاده از تئوری پیستون اصلاح‌شده کومار مورد ارزیابی قرار گرفته است. در تحقیقی دیگر ترکی و همکاران، پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی^۸ که در انتهای خود تحت نیروهای محوری تعقیب‌کننده واقع شده‌اند را مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. آن‌ها معادلات حاکم بر یک پوسته استوانه‌ای گیردار که تحت نیروی محوری تعقیب‌کننده واقع شده را با استفاده از اصل همیلتون استخراج و تحلیل پایداری را نیز با استفاده از روش گلرکین توسعه‌یافته انجام دادند و نیروهای فلاتر و مدهای متناظر با هر یک را برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع و طول به شعاع پوسته استوانه‌ای به‌دست

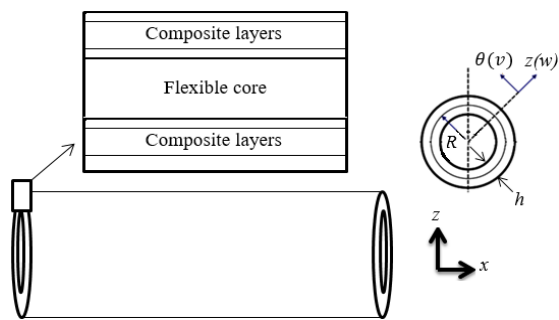
این تحقیق برای اولین بار، بررسی پدیده فلاتر یک پنل ساندویچی استوانه‌ای که در معرض بارمحوری تعقیب‌کننده قرار گرفته، برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته مطالعه شده است. نتایج بررسی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد که پدیده فلاتر تنها برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد اتفاق می‌افتد و در سایر شرایط مرزی فقط پدیده کمانش رخ می‌دهد. همچنین بررسی‌ها نشان می‌دهد که افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت موجب می‌شود پدیده فلاتر دیرتر به وقوع بپیوندد.

استخراج معادلات

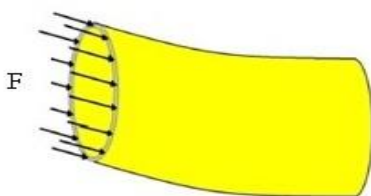
در این بخش، ابتدا مدل هندسی مورد مطالعه و سپس تئوری مورد استفاده ارائه می‌گردد. بعد از آن معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج می‌شود. در انتهای این بخش روش حل و چگونگی اعمال روش حل تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته بیان می‌شود.

مدل هندسی مورد مطالعه

مدل هندسی مورد مطالعه مطابق شکل ۱ در این مقاله عبارت است از یک پنل ساندویچی استوانه‌ای نسبتاً ضخیم که از دو رویه مواد مرکب لایه‌ای تشکیل شده و مطابق شکل ۲ در معرض بار محوری تعقیب‌کننده واقع شده است.



شکل ۱ - هندسه و مختصات پنل ساندویچی استوانه‌ای



شکل ۲ - پنل ساندویچی استوانه‌ای در معرض بارمحوری تعقیب‌کننده

آوردند. آن‌ها همین مطالعه را برای حالتی که به انتهای پوسته استوانه‌ای نیروی گسترده تعقیب‌کننده وارد می‌شود را بررسی نمودند [۱۲]. پارک و کیم [۱۳] پایداری دینامیکی یک پوسته استوانه‌ای دایروی ایزوتروپ یک‌سر آزاد که تحت نیروهای تعقیب‌کننده واقع شده را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق برای مدل‌سازی از تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده و نیروهای تعقیب‌کننده به صورت گسترده در جهت ضخامت توزیع شده‌اند. کادمی و همکارانش [۱۴] ناپایداری فلاتر و دیورژانس تیر-ستون یک‌سر گیردار با چند ترک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها تمرکز را بر روی رفتار پایداری یک تیر-ستون یک‌سر گیردار برنولی که تحت یک نیروی محوری پایستار یا ناپایستار قرار داشته و دارای چند ترک می‌باشد، قرار دادند و مقدار دقیق نیروی بحرانی فلاتر و دیورژانس را به دست آوردند. وانگ [۱۵] پایداری دینامیکی، تحلیل فلاتر و ناپایداری دیورژانس یک ورق مستطیلی ویسکوالاستیک ناپایستار را بررسی نمود. وانگ و همکاران [۱۶] پایداری دینامیکی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک با حالتی که ترک بر روی آن واقع شده و تحت نیروهای تعقیب‌کننده مماسی قرار دارد را مورد بررسی قرار داده‌اند. کریمی و همکاران [۱۷] اثر یک ترک لبه‌ای باز را روی ناپایداری تیرهای غیریکنواخت چرخشی که در معرض توزیع یکنواخت بار فشاری مماسی واقع شده‌اند را مورد مطالعه قرار دادند. پورموید و همکاران [۱۸] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش پنل ساندویچی استوانه‌ای که در معرض بارگذاری فشاری روی لبه‌های بالا و پایین در دو سوی پنل به صورت هم‌زمان و یکنواخت اعمال شده، پرداخته‌اند. سانگ و لی [۱۹]، تحلیل غیرخطی فلاتر پنل مرکب تخت را در جریان ماورای صوت با در نظر گرفتن امواج شوک و گرمایش آیرودینامیکی انجام دادند. آن‌ها در تحلیل خود از تئوری کلاسیک ورق، تئوری غیرخطی فون-کارمن و تئوری‌های پیستون مرتبه اول و سوم بهره بردند. سانکار و همکارانش [۲۰]، با استفاده از مدل المان محدود مرتبه بالا، تئوری زیگزاگ و تئوری جریان پتانسیل خطی، تحلیل فلاتر صفحات ساندویچی با تقویت‌کننده‌های نانولوله کربنی در رویه‌ها را انجام دادند.

باتوجه به تحقیقات انجام‌شده تاکنون پژوهشی که اثرات نیروی تعقیب‌کننده بر روی یک پنل ساندویچی را در شرایط مرزی مختلف مدل و رفتار آن را گزارش نماید، وجود ندارد. در

که در رابطه (۴)، θ زاویه الیاف و Q_{ij} به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (5)$$

$$Q_{44} = G_{12}, \quad Q_{66} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

همچنین معادله تنش- کرنش در هسته انعطاف‌پذیر هم به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix}^{core} = \begin{Bmatrix} E_{11}^c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{22}^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{x\theta} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

در نهایت، تنش کلی در پانل ساندویچی استوانه‌ای به صورت جمع تنش‌ها در لایه‌های پانل ساندویچی استوانه‌ای به صورت رابطه (۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^{outer composite layers} + \sigma_{ij}^{inner composite layers} + \sigma_{ij}^{core} \quad (7)$$

که در آن، منظور از i و j همان x و θ و z می‌باشد.

معادلات حاکم و شرایط مرزی

برای استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی پانل ساندویچی استوانه‌ای با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پوسته، ابتدا بایستی معادلات جابجایی را در معادلات کرنش جایگذاری کرد. برای این منظور، با جایگذاری معادله (۱) در معادله (۲) تانسورهای کرنش به صورت رابطه (۸) به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + z \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{w}{R}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \right)$$

ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به ترتیب برابر با مقادیر ثابت h_t ، h_b و h_c می‌باشد. شعاع‌های میانی رویه‌های بالا، پایین و هسته به ترتیب برابر R_t ، R_b و R_c می‌باشد. پنل دارای طول L و ضخامت کل h می‌باشد.

تئوری برشی مرتبه اول پنل ساندویچی استوانه‌ای نسبتاً ضخیم در این تحقیق میدان جابجایی برای پوسته استوانه‌ای نسبتاً ضخیم به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته شده است.

$$U(x, \theta, z, t) = u(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t)$$

$$V(x, \theta, z, t) = v(x, \theta, t) + z\psi_\theta(x, \theta, t) \quad (1)$$

$$W(x, \theta, z, t) = w(x, \theta, t)$$

که در آن t زمان و u و v و w جابجایی صفحه میانی، ψ_x و ψ_θ به ترتیب چرخش صفحه میانی حول محورهای x و θ را بیان می‌کنند. باتوجه به میدان جابجایی ارائه شده در رابطه (۱) کرنش‌های وابسته به آن به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

معادلات تنش-کرنش برای لایه‌های کامپوزیت با استفاده از قانون هوک، به صورت رابطه (۳) به دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{Bmatrix}^{(L)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{66} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{Bmatrix}^{(L)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

که در آن منظور از L همان تعداد لایه‌های کامپوزیت می‌باشد. همچنین ثابت‌های الاستیک ماده که متناسب با زاویه و نوع چیدمان لایه‌های کامپوزیت فرق می‌کنند به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شوند:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{44} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{44} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (4)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55} \cos^4 \theta + Q_{66} \sin^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = Q_{66} \cos^4 \theta + Q_{55} \sin^4 \theta$$

در صورتی که محرک خارجی بر پوسته استوانه‌ای نیرو وارد کند (دما یا نیروی محوری) در آن صورت کار نیروی خارجی هم برای آن بایستی در نظر گرفت.

$$\delta W = \int_0^L \int_0^{2\pi} F \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right) R d\theta dx \quad (13)$$

که در آن F بیان‌گر نیروی تعقیب‌کننده وارد شده به سیستم است. همچنین قابل ذکر است که چون نیرو در هر لحظه مماس بر پانل ساندویچی استوانه‌ای می‌باشد، بنابراین ترم‌هایی که از کار نیروهای خارجی به دست می‌آیند، وارد شرایط مرزی نمی‌شوند. حال با جایگذاری رابطه‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۳) در رابطه اصل همیلتون (۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\ \delta v: \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q_{z\theta}}{R} - (F) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \\ \delta w: \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{z\theta}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} - (F) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \delta \psi_x: \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xz} &= I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\ \delta \psi_\theta: \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_{z\theta} &= I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14)$$

و همچنین شرایط مرزی مرتبط به آن با استفاده از قضیه دیورژانس و گرادیان به صورت رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta u = 0 \quad or \quad (N_{xx})n_x + (N_{x\theta})n_\theta &= 0, \\ \delta v = 0 \quad or \quad (N_{x\theta})n_x + (N_{\theta\theta})n_\theta &= 0, \\ \delta w = 0 \quad or \quad (Q_{xz})n_x + (Q_{z\theta})n_\theta &= 0, \\ \delta \psi_x = 0 \quad or \quad (M_{xx})n_x + (M_{\theta x})n_\theta &= 0, \\ \delta \psi_\theta = 0 \quad or \quad (M_{x\theta})n_x + (M_{\theta\theta})n_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

به‌طور مثال، برای شرط مرزی گیردار - آزاد داریم؛
شرط مرزی گیردار در $x=0$:

$$N_{xx} = \delta v = Q_{xz} = M_{xx} = \delta \psi_\theta = 0$$

شرط مرزی آزاد در $x=L$:

$$N_{xx} = N_{x\theta} = Q_{xz} = M_{xx} = M_{x\theta} = 0$$

با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکتی و شرایط مرزی نیز قابل استخراج هستند. برای این منظور این اصل به صورت رابطه (۹) ارائه می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (9)$$

که در آن U, T و W به ترتیب نشان‌دهنده انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروی خارجی هستند. تغییرات انرژی جنبشی:

$$\delta T = \int_V \int_A \rho \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta u + z \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi_x \right) \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta v + z \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi_\theta \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta w \end{aligned} \right\} \times R dz dx d\theta \quad (10)$$

تغییرات انرژی پتانسیل:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \left[(\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{aligned} & (N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + M_{xx} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + N_{x\theta} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\delta w}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}) + \\ & M_{\theta x} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial \theta} + Q_{xz} (\delta \psi_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x}) + \\ & N_{x\theta} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + M_{x\theta} \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \psi_\theta}{\partial x} \right) \\ & + Q_{z\theta} \left(\delta \psi_\theta + \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} R dx d\theta \quad (11)$$

پارامترهای تعریف‌شده در رابطه (۱۱) که نیروهای محوری و گشتاورهای خمشی در راستاهای متفاوت می‌باشند، به صورت رابطه (۱۲) می‌باشد:

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}) dz \\ (M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}) z dz \\ (Q_{xz}, Q_{z\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} k_s (\sigma_{xz}, \sigma_{z\theta}) dz \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)، k_s یک ضریب تصحیح است که، $5/6$ در نظر گرفته می‌شود. این عدد به این خاطر ظاهر می‌شود که در تئوری لایو در ϵ_{xz} و $\epsilon_{\theta z}$ هیچ تابعی از z وجود ندارد و به همین دلیل از ضریب تصحیح برشی استفاده می‌شود.

روش حل

$$g_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k}; j = 1, \dots, N \quad (17)$$

رابطه (۱۷) را به صورت رابطه (۱۸) هم می‌توان نوشت:

$$g_j(x) = \frac{M(x)}{(x - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad (18)$$

که در آن:

$$M(x) = \prod_{k=1}^N (x - x_k) \quad (19)$$

$$M^{(1)}(x_j) = \prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)$$

که $M^{(1)}(x)$ مشتق مرتبه اول $M(x)$ است. ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول از مشتق‌گیری از تابع $g_j(x)$ به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آیند:

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} g_j^{(1)}(x_i) & j \neq i \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(1)} & j = i \end{cases}; i, j = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

ضرایب وزنی مشتقات مرتبه بالاتر (مشتق مرتبه n) از رابطه (۲۱) محاسبه خواهند شد:

$$C_{ij}^{(n)} = \begin{cases} n(C_{ij}^{(1)} C_{ii}^{(n-1)}) - \frac{C_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} & j \neq i \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(n)} & j = i \end{cases}; i, j = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

برای حل مسئله با استفاده از روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته، ابتدا ناحیه به صورت رابطه (۲۲) گسسته‌سازی می‌گردد به طوری که مختصات نقطه (x_i) برابر می‌شود با:

$$x_i = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{(i-1)}{(N-1)} \pi \right) \right); \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x \quad (22)$$

که در آن $N(x)$ تعداد تقسیمات در راستای x است. در نهایت میدان جابجایی را به صورت رابطه (۲۳) حدس می‌زنیم:

در روش تربیع تفاضلی برخلاف روش‌های گذشته مانند تفاضل محدود، مشتقات جزئی یک تابع در یک نقطه به صورت جمع خطی مقادیر وزن‌یافته از همان تابع در تمام نقاط دامنه تخمین زده می‌شود. این فرض باعث بالا رفتن دقت و کاهش چشم‌گیر در حجم محاسبات می‌شود. با این حال این روش نیز محدودیت‌هایی مانند مشکلات در گسسته‌سازی دامنه و همچنین محاسبه ضرایب وزنی نقاط دامنه را داشت. برای رفع نواقص آن، روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته^۹ به عنوان فرم اصلاح‌شده روش تربیع تفاضلی در ابتدای دهه نود میلادی توسط شاو و ریچاردز برای حل معادلات ناویر-استوکس دوبعدی ارائه شد و از آن پس در مسائل مختلف الاستیسیته برای ورق‌ها و پوسته‌ها مورد توجه قرار گرفت [۲۱ و ۲۲]. محاسبه ضرایب وزنی مشتقات در این روش نسبت به روش تربیع تفاضلی بسیار ساده‌تر است و برای تعداد بیشتری از نقاط بدون در نظر گرفتن محدودیت در انتخاب نقاط، قابل استفاده است. در این روش مشتق در هر نقطه به صورت ترکیبی از مقادیر گره‌ای در سایر نقاط تقریب زده می‌شود، بنابراین پس از اعمال این روش معادلات حاکم بر مسئله تبدیل به معادلات جبری می‌شوند که بر اساس نوع مسئله می‌تواند دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی باشد. این روش قابلیت حل انواع معادلات را دارا است. از این جمله می‌توان به معادلات با ضرایب متغیر، غیرخطی و معادلات مقادیر ویژه اشاره کرد. روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته در تحقیق‌های بسیاری برای حل مسائل ارتعاش و تحلیل تنش ورق‌های مستطیلی و پوسته‌های استوانه‌ای به کار رفته است [۲۳ و ۲۴].

اعمال روش حل تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته

پس از گسسته‌سازی ناحیه حل مسئله، نوبت به تقریب مشتقات موجود در معادلات حاکم می‌رسد. بنابر ایده روش تربیع تفاضلی تعمیم‌یافته مشتق مرتبه m ام تابع $f(x)$ در نقطه x_i برابر است با:

$$f^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^N C_{i,j}^{(m)} f(x_j); i = 1, \dots, N \quad (16)$$

که در آن، $f^{(m)}(x_i)$ مشتق مرتبه m ام تابع $f(x)$ در نقطه x_i و $C_{i,j}^{(m)}$ ضرایب وزنی اند. برای تعیین این ضرایب وزنی از چند جمله‌ای‌های درون‌یابی لاگرانژ استفاده می‌شود:

اعتبارسنجی قرار گرفته است. در ادامه به مطالعه پارامتری پنل ساندویچی استوانه‌ای که تحت نیروی تعقیب‌کننده واقع شده، پرداخته شده است.

بررسی همگرایی

به منظور بررسی دقت روش حاضر در تحلیل پایداری یک پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل در گام اول به بررسی همگرایی پرداخته می‌شود. جهت پاسخ صحیح از سازه، در این تحقیق همگرایی فرکانس‌های بی‌بعد بررسی شده است. به این منظور فرضیات ذیل در نظر گرفته شده است.

- خواص مواد مورد استفاده در تحلیل همگرایی و فلاتر پنل ساندویچی استوانه‌ای مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است.
- شرط مرزی به صورت گیردار در $x=0$ و آزاد در $x=L$ و همچنین در $\theta=0$ و $\theta=2\pi$ به صورت ساده در نظر گرفته شده است به صورتی که تنها می‌تواند دوران داشته باشد.
- پارامتر فرکانس بی‌بعد (λ) به صورت رابطه (۲۷) تعریف شده است [۱۲].

$$\lambda = \omega L^2 \sqrt{\frac{\mu}{E_{1t} I}} \quad , \quad \begin{cases} \mu = 2\pi R h \rho_t \\ I = \pi R^3 h \end{cases} \quad (27)$$

شکل‌های ۳ و ۴ تحلیل همگرایی را برای پنل ساندویچی در دو حالت یک‌سرگیردار-یک‌سر آزاد و دو سرگیردار نشان می‌دهند. در شکل ۳ با افزایش تعداد نودها و تقریباً از نود $N=16$ و در شکل ۴ از نود $N=13$ جواب‌ها همگرا شده و میزان فرکانس بی‌بعد با افزایش تعداد نودها به صورت یکنواخت باقی می‌ماند که این امر نشان‌دهنده همگرا شدن حل می‌باشد.

اعتبارسنجی

به منظور بررسی دقت روش حاضر در تحلیل پایداری پنل ساندویچی استوانه‌ای، سه مورد اعتبارسنجی به شرح ذیل صورت گرفته است. مطابق جدول ۲ ابتدا با استفاده از روش تحلیلی، نتایج فرکانس بدون بعد، سپس این نتایج به صورت عددی و با استفاده از روش جی‌دی‌کیو استخراج شدند.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که در نسبت‌های مختلف طول به شعاع، نتایج حل عددی و تحلیلی به همدیگر خیلی نزدیک می‌باشند. همچنین قابل ذکر است، هنگامی که نسبت طول به شعاع زیاد می‌شود، فرکانس بی‌بعد میل به افزایش پیدا

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= U(x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \\ v(x, \theta, t) &= V(x) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ w(x, \theta, t) &= W(x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \psi_x(x, \theta, t) &= \Psi_x(x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \\ \psi_\theta(x, \theta, t) &= \Psi_\theta(x) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\left\{ u, v, w, \psi_x, \psi_\theta \right\}^T = \left\{ U_{mn} e^{i\omega t}, V_{mn} e^{i\omega t}, W_{mn} e^{i\omega t}, \Psi_{xmn} e^{i\omega t}, \Psi_{\theta mn} e^{i\omega t} \right\}^T \quad (24)$$

همچنین شرط مرزی با اعمال روش تربیع تفاضلی تعمیم یافته هم مطابق با روابط بالا استخراج می‌شود که به دلیل کاهش حجم این تحقیق از ارائه آن صرف نظر شده است. در نهایت برای پوسته استوانه‌ای با قرار دادن رابطه (۲۴) در معادلات، مسئله به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل خواهد شد و سپس با استفاده از رابطه (۲۵) فرکانس‌ها و شکل موده‌های سیستم قابل محاسبه هستند.

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_b \\ d_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bd} \\ M_{db} & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_b \\ d_d \end{bmatrix} \quad (25)$$

در رابطه (۲۵)، پایین نویس b مربوط به نودهای کناری و پایین نویس d بیان‌گر نودهای میانی هستند. همچنین M و K بیان‌گر ماتریس‌های سختی و جرمی هستند. حال با توجه به رابطه (۲۵)، می‌توان رابطه (۲۶) را تشکیل داد:

$$\begin{aligned} [K^*] \{ \delta_i \} &= \omega^2 [M^*] \{ \delta_i \} \\ [K^*] &= [K_{dd} - M_{db} K_{bb}^{-1} k_{bd}] \\ [M^*] &= [M_{dd} - M_{db} K_{bb}^{-1} k_{bd}] \end{aligned} \quad (26)$$

که در رابطه (۲۶) منظور از δ_i میدان جابجایی سازه مفروض می‌باشد. حال با داشتن معادله (۲۶) می‌توان به راحتی فرکانس طبیعی سازه را محاسبه نمود.

نتایج و بحث

در این بخش جهت انجام محاسبات، ابتدا تعداد نودهای مورد نیاز برای همگرایی در روش جی‌دی‌کیو مورد بررسی، سپس نتایج مطالعه حاضر با نتایج کارهای قبلی مورد

جدول ۲ - مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل ساندویچی استوانه‌ای با شرط مرزی همه‌طرف ساده به‌ازای تغییر در نسبت طول به شعاع

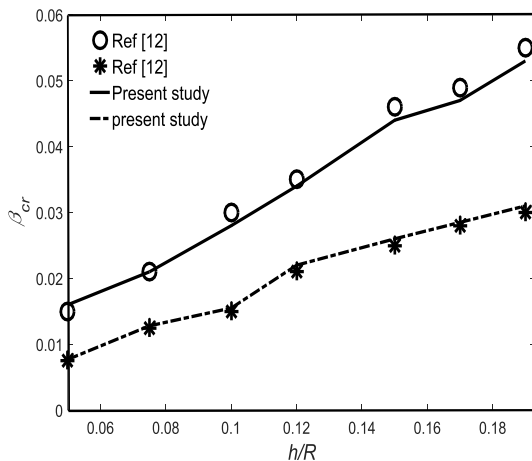
L/R	روش حل عددی دقیق ($N_I = 2$)	روش حل عددی ($N_I = 2$)	روش دقیق ($N_I = 3$)	روش حل عددی ($N_I = 3$)
۵	۴/۲۲۷۴۹	۴/۲۲۸۳۲	۴/۴۳۰۶۰	۴/۴۳۱۴۶
۶	۴/۷۰۵۳۷	۴/۷۰۶۴۶	۴/۹۴۶۷۱	۴/۹۴۷۸۹
۷	۵/۰۸۸۰۲	۵/۰۸۹۳۳	۵/۳۶۰۱۶	۵/۳۶۱۶۱
۸	۵/۳۹۵۱۰	۵/۳۹۶۶۹	۵/۶۹۲۲۴	۵/۶۹۳۹۱
۹	۵/۶۴۲۸۴	۵/۶۴۴۵۰	۵/۹۶۰۳۸	۵/۹۶۲۲۲

جدول ۳ - تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌ازای تغییر در بار بی‌بعد

β	مود اول فرکانسی [۲۵]	مطالعه حاضر	مود دوم فرکانسی [۲۵]	مطالعه حاضر
۰	۳/۵	۳/۵۷۵۵۷۸	۲۲/۵	۲۲/۴۲۶۵۲۶
۲/۵	۴	۳/۷۷۶۴۵۹۵	۲۲/۲	۲۲/۳۴۵۶۹۸
۵	۴/۵	۴/۲۸۷۵۴۲۶	۲۱/۲	۲۱/۶۷۸۹۵۶
۷/۵	۴/۹	۴/۸۱۷۴۵۸۹	۱۹/۵	۱۹/۸۲۶۵۴۷
۱۰	۵/۲	۵/۱۹۱۴۵۸۹	۱۷/۵	۱۷/۶۹۸۵۶۹
۱۲/۵	۵/۹۰	۶/۲۸۲۱۵۳۸	۱۳/۷	۱۳/۷۷۵۸۹۶

نهایتاً نتایج بار بحرانی فلاتر به‌ازای تغییر در نسبت ضخامت به شعاع متفاوت برای یک پوسته استوانه‌ای با شرط مرزی گیردار - آزاد، مطابق شکل ۵ با نتایج ترکی و همکاران [۱۲] مورد مقایسه قرار گرفته است.

برطبق شکل ۵ مشاهده می‌شود که نتایج پژوهش فوق با نتایج به‌دست‌آمده توسط ترکی و همکاران تطابق بسیار خوبی دارد.



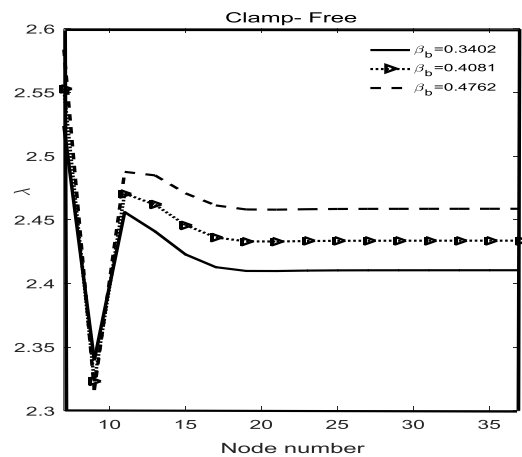
شکل ۵ - مقایسه نتایج بار بحرانی فلاتر به‌ازای تغییر در نسبت ضخامت به شعاع متفاوت

می‌کند. همچنین با افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت، به‌دلیل سفت‌تر شدن سازه، فرکانس بی‌بعد افزایش می‌یابد.

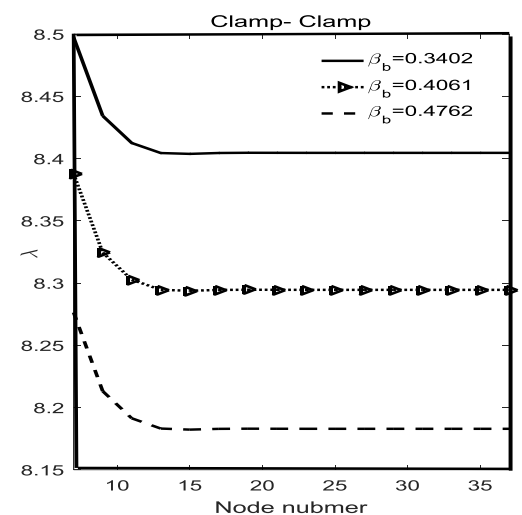
در اعتبارسنجی دیگر، نتایج تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌ازای تغییر در بار بی‌بعد برای یک پوسته استوانه‌ای با نتایج سایمیتسز و هاجز مقایسه شده که نتایج آن مطابق جدول ۳ می‌باشد [۲۵].

جدول ۱ - خواص مکانیکی مواد بکار رفته در پانل ساندویچی مرکب

$E_1 = E_2 = E_3 = 0.00689 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.00345 \text{ GPa}$	هسته
$\nu = 10^{-5}$, $\rho = 94.195 \text{ Kg / m}^3$	
$E_1 = 131 \text{ GPa}$, $E_2 = E_3 = 10.34 \text{ GPa}$	رویه‌ها
$G_{12} = G_{13} = 6.895 \text{ GPa}$,	
$G_{23} = 6.205 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22$,	
$\nu_{23} = 0.49$, $\rho = 1627 \text{ kg / m}^3$	

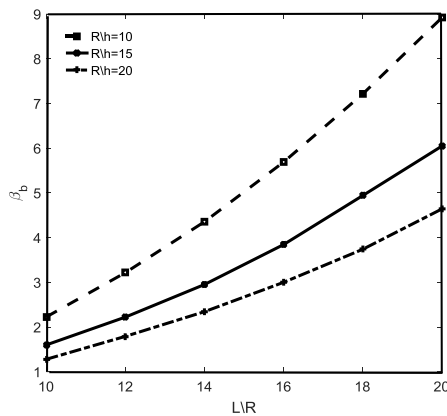


شکل ۳ - محاسبه روند همگرایی برای پانل ساندویچی استوانه‌ای با شرط مرزی گیردار - آزاد



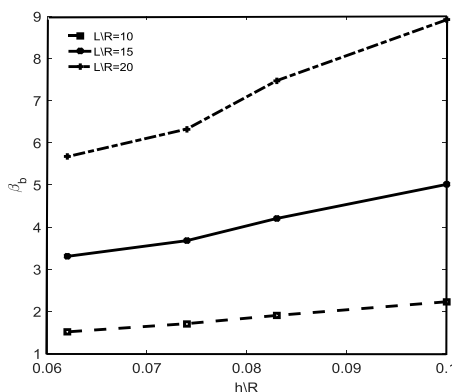
شکل ۴ - محاسبه روند همگرایی برای پانل ساندویچی استوانه‌ای با شرط مرزی گیردار - گیردار

همچنین مطابق شکل ۷ مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، مقدار نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر افزایش ولی مطابق شکل ۸ با افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل مقدار نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر کاهش می‌یابد.



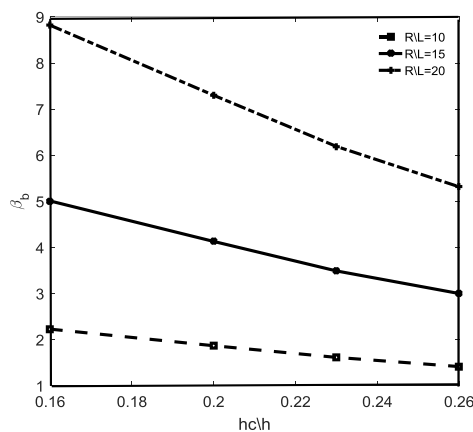
شکل ۶ - نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر برحسب

نسبت طول به شعاع پنل (L/R) در چیدمان [0,90,0]



شکل ۷ - نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر برحسب

نسبت ضخامت به شعاع پنل (h/R) در چیدمان [0,90,0]



شکل ۸ - نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر برحسب نسبت ضخامت هسته

به ضخامت کل پنل (hc/h) در چیدمان [0,90,0]

بررسی اثر نسبت شعاع به ضخامت (R/h) بر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر و فرکانس بی‌بعد بحرانی

در این بخش به بررسی تأثیر نسبت شعاع به ضخامت بر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر و فرکانس بی‌بعد بحرانی در چند چیدمان مختلف که در جدول ۴ نشان داده شده، پرداخته می‌شود. نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر عبارت است از [۱۲]:

$$\beta_b = \frac{2(L/R)^2}{1-\nu^2} \beta_s \quad (28)$$

که در آن

$$\beta_s = \frac{1-\nu^2}{E_t h} \bar{P} \quad (29)$$

و $\bar{P} = P/(2\pi R)$ می‌باشد.

جدول ۴ - فرکانس طبیعی بی‌بعد بحرانی و نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر پنل ساندویچی استوانه‌ای در چیدمان و نسبت شعاع به ضخامت متفاوت

R/h	[0,90]		[0,90,0]		[0,90,90,0]	
	λ	β_b	λ	β_b	λ	β_b
۱۲	۲/۳۱۳	۰/۷۷۸۷	۲/۴۶۷	۰/۹۵۷۳	۲/۴۸۰	۰/۹۷۸۷
۱۴	۲/۲۱۸	۰/۶۹۱۸	۲/۳۴۲	۰/۸۵۰۱	۲/۲۶۲	۰/۸۷۵۱
۱۶	۲/۱۳۲	۰/۶۲۸۶	۲/۲۵۹	۰/۷۷۱۵	۲/۲۵۴	۰/۷۹۰۶
۱۸	۲/۰۸۳	۰/۵۷۸۶	۲/۲۴۴	۰/۷۰۷۲	۲/۳۲۸	۰/۷۱۷۹
۲۰	۲/۰۷۳	۰/۵۳۵۸	۲/۲۳۸	۰/۶۵۴۸	۲/۲۸۱	۰/۶۶۶۷

نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که با افزایش تعداد لایه‌ها به دلیل سفت‌تر شدن سازه مقادیر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر و فرکانس بی‌بعد بحرانی افزایش می‌یابد ولی با افزایش نسبت شعاع به ضخامت در هر چیدمان مقادیر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر و فرکانس بی‌بعد بحرانی کاهش می‌یابند.

بررسی اثر نسبت‌های L/R، h/R و hc/h بر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر در چیدمان [0,90,0]

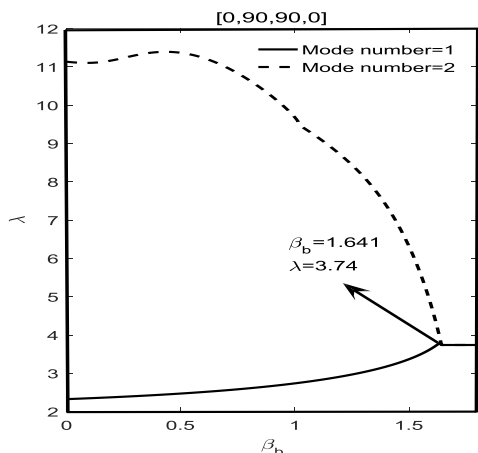
در این بخش به بررسی تأثیر نسبت‌های طول به شعاع، ضخامت به شعاع و ضخامت هسته به ضخامت کل پنل بر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر پرداخته می‌شود. همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به شعاع، مقدار نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر افزایش می‌یابد. به دلیل اینکه طبق رابطه (۲۸) نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر رابطه مستقیم و مجذور با نسبت طول به شعاع پنل دارد.

بررسی پدیده فلاتر در شرایط مرزی مختلف با چیدمان مختلف

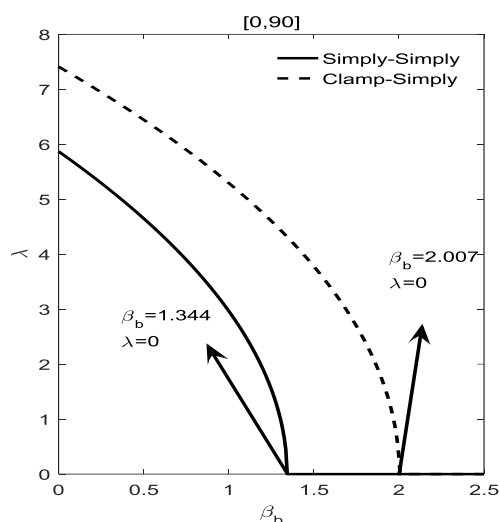
یکی دیگر از اهداف این تحقیق بررسی پدیده فلاتر در شرایط مرزی مختلف برای یک پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که پدیده فلاتر در پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل فقط در شرایط مرزی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد رخ می‌دهد، که این مسئله برای نمونه در چیدمان‌های $[0,90]$ و $[0,90,90,0]$ در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است. همچنین قابل ذکر است که چیدمان $[0,90]$ به دلیل نوع خاص چیدمان، دارای فرکانس بی‌بعد و نیروی فلاتر بی‌بعد کمتری نسبت به پنل ساندویچی استوانه‌ای با چیدمان $[0,90,90,0]$ می‌باشد. دلیل این امر آن است که با افزایش چیدمان‌ها، فرکانس بی‌بعد و بار بحرانی بی‌بعد فلاتر افزایش می‌یابد.

همچنین بررسی نتایج نشان می‌دهد که در سایر شرایط مرزی با افزایش بارگذاری تعقیب‌کننده فقط پدیده دیورژانس یا کمانش استاتیکی اتفاق می‌افتد (شکل‌های ۱۱ و ۱۲).

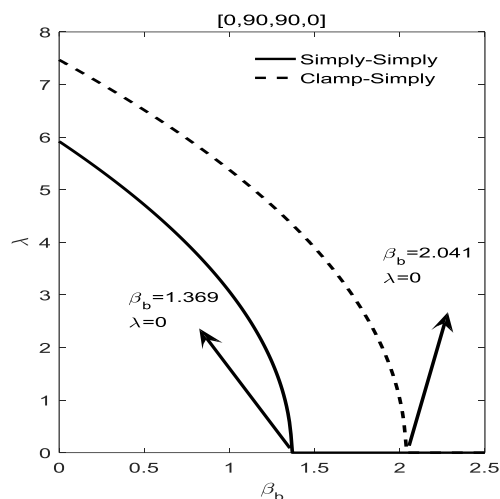
همچنین نمایش قسمت موهومی برحسب نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر در شکل ۱۳ برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد که منجر به دوشاخگی سازه می‌شود را نشان می‌دهد.



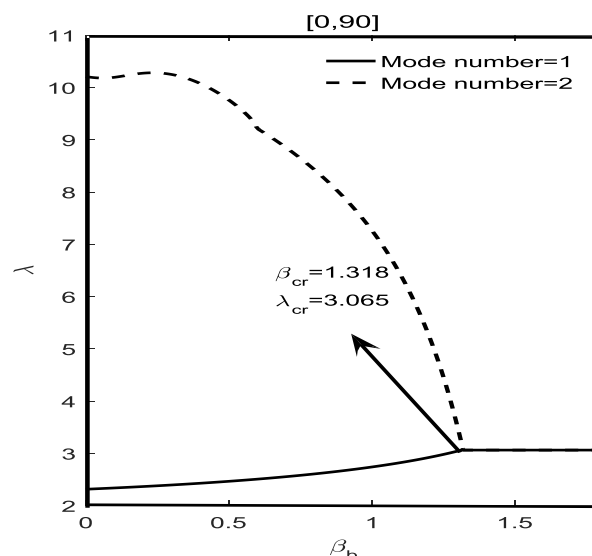
شکل ۱۰- پدیده فلاتر در پنل استوانه‌ای با شرایط مرزی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد در چیدمان $[0,90,90,0]$



شکل ۱۱ - پدیده کمانش در پنل استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار- ساده در چیدمان $[0,90]$



شکل ۱۲- پدیده کمانش در پنل استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار- ساده در چیدمان $[0,90,90,0]$



شکل ۹ - پدیده فلاتر در پنل استوانه‌ای با شرایط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد در چیدمان $[0,90]$

- پدیده فلاتر فقط در شرایط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد رخ می‌دهد و در سایر شرایط مرزی تنها پدیده دیورژانس یا کمانش استاتیکی در پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل اتفاق می‌افتد.

پیوست‌ها

- شرایط مرزی مختلف به فرم روش تربیع تفاضلی تعمیم یافته عبارت‌اند از:
تکیه‌گاه گیردار:

$$u_i = v_i = w_i = \psi_x = \psi_\theta = 0; \quad i = 1, N_x \quad (29)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$N_{xxi} = v_i = w_i = M_{xxi} = \psi_\theta = 0; \quad i = 1, N_x \quad (30)$$

تکیه‌گاه آزاد:

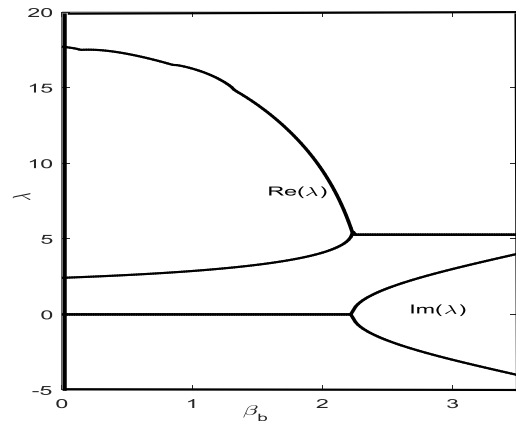
$$N_{xxi} = N_{x\theta i} = Q_{zi} = M_{xxi} = M_{x\theta i} = 0; \quad i = 1, N_x \quad (31)$$

پی‌نوشت‌ها

- ۱ Sandwich panel
- ۲ Flutter
- ۳ Follower force
- ۴ Divergence
- ۵ Beck
- ۶ Leipholz
- ۷ Hauger
- ۸ functionally graded material
- ۹ Generalized differential quadrature

منابع و مراجع

- [1] Vinson, J. R. "The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials", New York: Technomic, pp. 81-105, 1999.
- [۲]. رضایی پژند، جلیل، علیدوست، حامد، "حل تحلیلی پایداری دینامیکی تیر کامپوزیت چندلایه تحت اثر نیروی دنبال‌کننده"، مجله علمی پژوهشی مکانیک مدرس، شماره دهم، صفحات ۲۳۹-۲۳۳، ۱۳۹۴.
- [3] Nikolai, E., "On the stability of the rectilinear form of equilibrium of a bar in compression and torsion", Izvestia Leningradskogo Politechnicheskogo Instituta, Vol. 31, No. 5, pp. 201-231, 1928.



شکل ۱۳- تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل ساندویچی استوانه‌ای با شرط مرزی گیردار- آزاد

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، فلاتر (پایداری دینامیکی) پنل ساندویچی استوانه‌ای شکل در شرایط مرزی مختلف که تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده محوری قرار گرفته، بررسی شده است. ابتدا با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و اصل همیلتون معادلات حاکم استخراج و سپس با استفاده از روش تربیع تفاضلی تعمیم یافته حل شده‌اند. اعتبار تحلیل با استفاده از نتایج سایر مقالات مورد بررسی قرار گرفت که نشان از دقت قابل قبول روش ساده حاضر برای تحلیل در شرایط مرزی مختلف می‌باشد. پس از اعتبارسنجی روش حاضر، به مطالعه پارامتری پرداخته شده است. همچنین نتایج این تحقیق نشان می‌دهد:

- با افزایش تعداد لایه‌ها مقادیر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر و فرکانس بی‌بعد بحرانی به دلیل سفت‌تر شدن سازه افزایش می‌یابد ولی با افزایش نسبت شعاع به ضخامت در هر چیدمان مقادیر نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر و فرکانس بی‌بعد بحرانی کاهش می‌یابند.
- با افزایش نسبت طول به شعاع پانل ساندویچی استوانه‌ای، فرکانس طبیعی بی‌بعد و نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، مقدار نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر افزایش ولی با افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پنل مقدار نیروی بی‌بعد بحرانی فلاتر کاهش می‌یابد.

- [4] Beck, M., "Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes", Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), Vol. 3, No. 3, pp. 225-228, 1952.
- [5] Leipholz, H. H. E., "On principles of stationarity for non-selfadjoint rod problems", Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 59, No. 2, pp. 215-226, 1986.
- [6] Kar, R. C. and Hauger, W., "Stability of a pretwisted tapered cantilever beam subjected to dissipative and follower forces", Journal of Sound and Vibration, Vol. 81, No. 4, pp. 565-573, 1982.
- [7] Toriki Harchegani M. E. and Kazemi, M. T., "Effect of shell axial deformation on flutter of cantilevered cylindrical shells under follower forces", Journal of Computational & Applied Research in Mechanical Engineering (JCARME), Vol. 2, No. 1, pp. 15-24, 2012.
- [8] Altman, W. and De Oliveira, M., "Vibration and stability of cantilevered cylindrical shell panels under follower forces", Journal of sound and vibration, Vol. 122, No. 2, pp. 291-298, 1988.
- [9] Bismarck-Nasr, M. N., "Dynamic stability of shallow shells subjected to follower forces", AIAA journal, Vol. 33, No. 2, pp. 355-360, 1995.
- [10] Shin, W. H., Oh, I. K., Han, J. H and Lee, I., "Aeroelastic characteristics of cylindrical hybrid composite panels with viscoelastic damping treatments", Journal of Sound and Vibration, Vol. 296, No. 1, pp. 99-116, 2006.
- [11] Toriki, M. E., Kazemi, M. T., Haddadpour, H. and Mahmoudkhani, S., "Dynamic stability of cantilevered functionally graded cylindrical shells under axial follower forces", Thin-Walled Structures, Vol. 79, No. 1, pp. 138-146, 2014.
- [12] Toriki, M. E., Kazemi, M. T., Reddy, J. N., Haddadpour, H. and Mahmoudkhani, S., "Dynamic stability of functionally graded cantilever cylindrical shells under distributed axial follower forces", Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, No. 3, pp. 801-817, 2014.
- [13] Park, S. H. and Kim, J. H., "Dynamic stability of a completely free circular cylindrical shell subjected to a follower force", Journal of sound and vibration, Vol. 231, No. 4, pp. 989-1005, 2000.
- [14] Caddemi S., Calio I. and Cannizzaro F., "Flutter and divergence instability of multi-cracked cantilever beam – column", Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, pp.1718-1733, 2014.
- [15] Wang, Z. M., Zhou, Y. F. and Wang, Y., "Dynamic stability of a non-conservative viscoelastic rectangular plate", Journal of Sound and Vibration, Vol. 307, No. 1, pp. 250-264, 2007.
- [16] Wang, Z., Wang, Y and Guo, X., "Dynamic stability of linearly varying thickness viscoelastic rectangular plate with crack and subjected to tangential follower force", Applied Acoustics, Vol. 70, No. 6, pp. 845-856, 2009.
- [17] Karimi-Nobandegani, A., Fazelzadeh, S. A. and Ghavanloo, E., "Non-conservative stability of spinning pretwisted cantilever beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 412, 130-147, 2018.
- [۱۸]. پورموید، علیرضا، ملک‌زاده فرد، کرامت، شهروی، مرتضی، "تحلیل کماتش و ارتعاشات آزاد پانل ساندویچی استوانه‌ای ضخیم با هسته‌انعطاف‌پذیر با استفاده از تئوری مرتبه بالا"، مجله علمی-پژوهشی مکانیک مدرس، شماره سوم، صفحات ۳۳۸-۳۲۷، ۱۳۹۶.
- [19] Song, Z. G. and Li, F. M. "Aero-thermo-elastic analysis of nonlinear composite laminated panel with aerodynamic heating in hypersonic flow", Composites: Part B, Vol. 56, No. 5, pp. 830-839, 2014.
- [20] Sankar, A., Natarajan, S., Haboussi, M., Ramajeyathilagam, K. and Ganapathi, M. "Panel flutter characteristics of sandwich plates with CNT reinforced facesheets using an accurate higher-order theory", Journal of Fluids and Structures, Vol. 50, pp. 376-391, 2014.
- [21] Bellman, R. and Casti, J., "Differential quadrature and long-term integration", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.
- [22] Bellman, R., Kashef, B. and Casti, J., "Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations", Journal of computational physics, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.
- [23] Shu C. and Richards, B. E., "Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations", International Journal for

- Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, No. 7, pp. 791-798, 1992.
- [24] Shu, C., “*Differential quadrature and its application in engineering*”, Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] Simitzes, G. J. and Hodges, D. H., “*Fundamentals of structural stability*”, Butterworth-Heinemann, 2006.